Subiectul III — Exercițiul 1

Matematica — M1_Mate-Info

Toate aparițiile acestui exercițiu din toate modelele de examen din categoria de mai sus.

102 exerciții · din 102 sesiuni (2012–2026)

1. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

Sursă: 2012 · Model Oficial

2012_Matematica_M1_Mate-Info_Model_Oficial_Subiect.pdf

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^3-3x+2$.

5p **a)** Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{f(-x)}$.

5p **b)** Demonstrați că funcția f este descrescătoare pe intervalul $[-1,1]$.

5p **c)** Determinați $m\in\mathbb{R}$ pentru care ecuația $f(x)=m$ are trei soluții reale distincte.

2. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

Sursă: 2012 · Speciala Subiect V07 · V07

2012_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Speciala_Subiect_V07.pdf

	1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$.
5p	**a)** Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{f(x)}$.
5p	**b)** Demonstrați că funcția f este convexă pe $\mathbb{R}$.
5p	**c)** Arătați că funcția $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=f\left(\sqrt{x}\right)$ este strict crescătoare pe $(0,+\infty)$.

3. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

Sursă: 2012 · Toamna August · V09

2012_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Toamna_August-Septembrie_Subiect_V09.pdf

	1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to(0,+\infty)$, $f(x)=x+\sqrt{x^2+1}$.
5p	**a)** Calculați $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-1}{x}$.
5p	**b)** Determinați ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției f.
5p	**c)** Demonstrați că, pentru orice număr real $m>0$, ecuația $f(x)=m$ are o soluție unică în $\mathbb{R}$.

4. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

Sursă: 2012 · Vara Iunie · V05

2012_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Vara_Iunie-Iulie_Subiect_V05.pdf

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-12x$.

5p **a)** Arătați că funcția este crescătoare pe intervalul $[2,+\infty)$.

5p **b)** Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{f(x)}$.

5p **c)** Determinați mulțimea numerelor reale a pentru care ecuația $f(x)=a$ are trei soluții reale distincte.

5. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

Sursă: 2013 · Model Oficial

2013_Matematica_M1_Mate-Info_Model_Oficial_Subiect.pdf

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x-x$.

5p **a)** Calculați $f'(0)$.

5p **b)** Arătați că, pentru fiecare număr natural $n\geq 2$, ecuația $f(x)=n$ are exact o soluție în intervalul $(0,+\infty)$.

5p **c)** Fie x_n unica soluție din intervalul $(0,+\infty)$ a ecuației $f(x)=n$, unde n este număr natural, $n\geq 2$. Arătați că $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=+\infty$.

6. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

Sursă: 2013 · Speciala Subiect V03 · V03

2013_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Speciala_Subiect_V03.pdf

	1. Se consideră funcţia $f:(-1,1)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln\dfrac{1-x}{1+x}$.
5p	**a)** Calculați $f'(x)$, $x\in(-1,1)$.
5p	**b)** Verificaţi dacă funcţia f este descrescătoare pe intervalul $(-1,1)$.
5p	**c)** Determinaţi punctele de inflexiune a funcţiei f.

7. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

Sursă: 2013 · Toamna August · V09

2013_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Toamna_August-Septembrie_Subiect_V09.pdf

	1. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{e^x}{x+e^x}$.
5p	**a)** Arătaţi că $f'(x)=\dfrac{(x-1)e^x}{\left(x+e^x\right)^2}$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.
5p	**b)** Determinaţi ecuaţia asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.
5p	**c)** Demonstrați că $f(x)\geq\dfrac{e}{e+1}$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.

8. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

Sursă: 2013 · Vara Iunie · V02

2013_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Vara_Iunie-Iulie_Subiect_V02.pdf

	1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\cos x+\frac{x^2}{2}$.
5p	**a)** Calculați $f'(x)$, $x\in\mathbb{R}$.
5p	**b)** Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x_0=0$, situat pe graficul funcției f.
5p	**c)** Demonstraţi că $f(x)\geq 1$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

9. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

Sursă: 2014 · Model Oficial

2014_Matematica_M1_Mate-Info_Model_Oficial_Subiect.pdf

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}$.

5p **a)** Calculaţi $f'(x)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinaţi ecuaţia asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.

5p **c)** Determinaţi intervalele de monotonie ale funcţiei f.

10. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

Sursă: 2014 · Simulare Nationala

2014_Matematica_M1_Mate-Info_Simulare_Nationala_Subiect.pdf

1. Se consideră funcţia $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2+2}{x-1}$.

5p **a)** Determinaţi ecuaţia asimptotei oblice la graficul funcţiei f.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=2$, situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)^{x+3}$.

11. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

Sursă: 2014 · Speciala Subiect V09 · V09

2014_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Speciala_Subiect_V09.pdf

	1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x+e^x$.
5p	**a)** Calculați $f'(x)$, $x\in\mathbb{R}$.
5p	**b)** Determinaţi ecuaţia asimptotei oblice spre $-\infty$ la graficul funcţiei f.
5p	**c)** Arătaţi că $f(x)\geq 4x+1$ pentru orice număr real x.

12. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

Sursă: 2014 · Toamna August · V07

2014_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Toamna_August-Septembrie_Subiect_V07.pdf

	1. Se consideră funcţia $f:(-2,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{xe^x}{x+2}$.
5p	**a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{\left(x^2+2x+2\right)e^x}{(x+2)^2}$, $x\in(-2,+\infty)$.
5p	**b)** Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x_0=0$, situat pe graficul funcţiei f.
5p	**c)** Arătaţi că ecuaţia $f(x)=1$ are cel puțin o soluţie în intervalul $(1,2)$.

13. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

Sursă: 2014 · Vara Iunie · V01

2014_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Vara_Iunie-Iulie_Subiect_V01.pdf

SUBIECTUL al III-lea

	1. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$.
5p	**a)** Arătaţi că $f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$, $x\in(0,+\infty)$.
5p	**b)** Determinați ecuația asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției f.
5p	**c)** Arătaţi că $f(x)\le\dfrac{1}{e}$ pentru orice $x\in(0,+\infty)$.

14. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

Sursă: 2015 · Model Oficial

2015_Matematica_M1_Mate-Info_Model_Oficial_Subiect.pdf

	1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x+1}{e^x-x}$.
5p	**a)** Calculaţi $f'(x)$, $x\in\mathbb{R}$.
5p	**b)** Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x_0=0$, situat pe graficul funcţiei f.
5p	**c)** Calculaţi $\lim\limits_{x\to+\infty} f(-x)$.

15. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

Sursă: 2015 · Simulare Nationala

2015_Matematica_M1_Mate-Info_Simulare_Nationala_Subiect.pdf

	1. Se consideră funcţia $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-\ln(x+1)$.
5p	**a)** Calculați $f'(x)$, $x\in(-1,+\infty)$.
5p	**b)** Calculați $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-f(x)-\ln 2}{x-1}$.
5p	**c)** Demonstrați că $\ln(x+1)\le x$, pentru orice $x\in(-1,+\infty)$.

16. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

Sursă: 2015 · Speciala Subiect V09 · V09

2015_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Speciala_Subiect_V09.pdf

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{2(x-1)(x+1)}{\left(x^2+x+1\right)^2}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x=0$, situat pe graficul funcţiei f.

5p **c)** Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)\right)^x$.

17. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

Sursă: 2015 · Toamna August · V01

2015_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Toamna_August-Septembrie_Subiect_V01.pdf

	1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-\sqrt{x^2+1}$.
5p	**a)** Arătaţi că $f'(x)=1-\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$, $x\in\mathbb{R}$.
5p	**b)** Determinaţi ecuaţia asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.
5p	**c)** Arătaţi că derivata funcţiei f este descrescătoare pe $\mathbb{R}$.

18. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

Sursă: 2015 · Vara Iunie · V08

2015_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Vara_Iunie-Iulie_Subiect_V08.pdf

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x+2}{x-1}$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x)=-\dfrac{3}{(x-1)^2}$, $x\in(1,+\infty)$.

5p **b)** Arătați că funcția f este convexă pe intervalul $(1,+\infty)$.

5p **c)** Determinați coordonatele punctului situat pe graficul funcției f, în care tangenta la graficul funcției f este paralelă cu dreapta de ecuație $y=-3x$.

19. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

Sursă: 2016 · Model Oficial

2016_Matematica_M1_Mate-Info_Model_Oficial_Subiect.pdf

2. Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n = \int_0^1 \left(1-x^2\right)^n dx$.

5p **a)** Arătați că $I_1 = \frac{2}{3}$.

5p **b)** Demonstrați că $I_{n+1} \leq I_n$, pentru orice număr natural nenul n.

5p **c)** Demonstrați că $(2n+3)I_{n+1} = 2(n+1)I_n$, pentru orice număr natural nenul n.

20. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

Sursă: 2016 · Simulare Nationala

2016_Matematica_M1_Mate-Info_Simulare_Nationala_Subiect.pdf

2. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$.

5p **a)** Calculaţi $\displaystyle\int_2^4 \frac{1}{\ln x} f(x)\,dx$.

5p **b)** Arătaţi că $\displaystyle\int_1^e \frac{f(x)}{x}\,dx = 1-\frac{2}{e}$.

5p **c)** Demonstraţi că $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_1^e \frac{f(x)}{x^n}\,dx = 0$.

21. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

Sursă: 2016 · Speciala Subiect V01 · V01

2016_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Speciala_Subiect_V01.pdf

	1. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-8\ln x$.
5p	**a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{2(x-2)(x+2)}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.
5p	**b)** Determinați intervalele de monotonie a funcției f.
5p	**c)** Demonstraţi că ecuaţia $f(x)=0$ are două soluţii reale distincte.

22. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

Sursă: 2016 · Toamna August · V02

2016_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Toamna_August-Septembrie_Subiect_V02.pdf

	1. Se consideră funcţia $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln\frac{x+1}{x-1}$.
5p	**a)** Arătaţi că $f'(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x-1}$, $x\in(1,+\infty)$.
5p	**b)** Demonstrați că funcția f este convexă pe $(1,+\infty)$.
5p	**c)** Demonstrați că $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(f'(2)+f'(3)+f'(4)+\ldots+f'(n)\right)=-\frac{3}{2}$.

23. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

Sursă: 2016 · Vara Iunie · V08

2016_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Vara_Iunie-Iulie_Subiect_V08.pdf

	1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.
5p	**a)** Arătaţi că $f'(x)=\dfrac{1}{\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}}$, $x\in\mathbb{R}$.
5p	**b)** Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x=0$, situat pe graficul funcţiei f.
5p	**c)** Demonstrați că, pentru orice număr real a, $a\in(-1,1)$, ecuația $f(x)=a$ are soluție unică.

24. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

Sursă: 2017 · Model Oficial

2017_Matematica_M1_Mate-Info_Model_Oficial_Subiect.pdf

	1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^{2018}+2018x+2$.
5p	**a)** Arătați că $f'(x)=2018\left(x^{2017}+1\right)$, $x\in\mathbb{R}$.
5p	**b)** Determinaţi numărul real a, știind că punctul $A(a,2020)$ aparține tangentei la graficul funcţiei f care trece prin punctul de abscisă $x=0$ situat pe graficul funcţiei f.
5p	**c)** Demonstrați că ecuația $f(x)=0$ are exact două soluții reale distincte.

25. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

Sursă: 2017 · Simulare Nationala

2017_Matematica_M1_Mate-Info_Simulare_Nationala_Subiect.pdf

2. Se consideră funcţia $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$ şi, pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n=\displaystyle\int_0^1 x^n f(x)\,dx$.

5p **a)** Arătaţi că $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx=2\left(\sqrt{2}-1\right)$.

5p **b)** Demonstraţi că $I_n\le\dfrac{1}{n+1}$, pentru orice număr natural nenul n.

5p **c)** Demonstraţi că $(2n+1)I_n=2\sqrt{2}-2nI_{n-1}$, pentru orice număr natural n, $n\ge 2$.

26. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

Sursă: 2017 · Speciala Subiect V04 · V04

2017_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Speciala_Subiect_V04.pdf

2. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{(x+1)^2}$.

5p **a)** Arătaţi că $\displaystyle\int_1^2 \frac{x+1}{\sqrt{x}} f(x)\,dx=\ln\frac{3}{2}$.

5p **b)** Demonstraţi că orice primitivă a funcţiei f este strict crescătoare pe intervalul $(0,+\infty)$.

5p **c)** Determinaţi numărul real m, $m>0$, ştiind că suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\sqrt{x}(x+1)f(x)$, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x=1$ şi $x=2$ are aria egală cu $1-\ln\dfrac{m+1}{m}$.

27. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

Sursă: 2017 · Toamna August · V10

2017_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Toamna_August-Septembrie_Subiect_V10.pdf

	1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2e^x-x^2-2x-2$.
5p	**a)** Arătaţi că $f'(x)=2\left(e^x-x-1\right)$, $x\in\mathbb{R}$.
5p	**b)** Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcției f, în punctul de abscisă $x=0$, situat pe graficul funcţiei f.
5p	**c)** Demonstrați că funcția f este crescătoare pe $\mathbb{R}$.

28. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

Sursă: 2017 · Vara Iunie · V02

2017_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Vara_Iunie-Iulie_Subiect_V02.pdf

SUBIECTUL al III-lea

	1. Se consideră funcţia $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{\ln x}{1-x}$.
5p	**a)** Arătaţi că $f'(x)=\dfrac{1-x+x\ln x}{x(1-x)^2}$, $x\in(1,+\infty)$.
5p	**b)** Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f.
5p	**c)** Demonstrați că $x\ln x>x-1$, pentru orice $x\in(1,+\infty)$.

29. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

Sursă: 2018 · Model Oficial

2018_Matematica_M1_Mate-Info_Model_Oficial_Subiect.pdf

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\operatorname{arctg}x-x$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=-\dfrac{x^2}{x^2+1}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că $f(x)+g(x)=\dfrac{\pi}{2}$, pentru orice număr real x, unde $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=\operatorname{arcctg}x+x$.

30. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

Sursă: 2018 · Simulare Nationala

2018_Matematica_M1_Mate-Info_Simulare_Nationala_Subiect.pdf

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\operatorname{arctg} x$.

5p **a)** Arătaţi că $\int_0^1 f(\operatorname{tg} x)\,dx=\frac{1}{2}$.

5p **b)** Calculaţi $\int_0^1 \frac{f(x)}{x^2+1}dx$.

5p **c)** Demonstrați că $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{n+2}\le(n+1)\int_0^1 x^n f(x)\,dx\le\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2(n+2)}$, pentru orice număr natural nenul n.

31. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

Sursă: 2018 · Speciala Subiect V03 · V03

2018_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Speciala_Subiect_V03.pdf

	1. Se consideră funcţia $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x^3-3x^2+6x-6\ln(x+1)$.
5p	**a)** Arătaţi că $f'(x)=\dfrac{6x^3}{x+1}$, $x\in(-1,+\infty)$.
5p	**b)** Demonstrați că valoarea minimă a funcției f este 0.
5p	**c)** Calculați $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{f(x)}}{x}$.

32. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

Sursă: 2018 · Toamna August · V09

2018_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Toamna_August-Septembrie_Subiect_V09.pdf

1. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}\ln x$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{2-\ln x}{2x\sqrt{x}}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinați abscisa punctului situat pe graficul funcției f, în care tangenta la graficul funcţiei f este perpendiculară pe axa Oy.

5p **c)** Demonstrați că $2^{\sqrt{3}}<3^{\sqrt{2}}$.

33. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

Sursă: 2018 · Vara Iunie · V02

2018_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Vara_Iunie-Iulie_Subiect_V02.pdf

2. Se consideră funcţia $f:(-3,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{2x+3}{x+3}$.

5p **a)** Arătaţi că $\displaystyle\int_0^1 (x+3)f(x)\,dx=4$.

5p **b)** Arătaţi că $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx=2-3\ln\frac{4}{3}$.

5p **c)** Pentru fiecare număr natural n, se consideră numărul $I_n=\displaystyle\int_0^1 e^x(x+3)^n\left(f(x)\right)^n dx$. Demonstraţi că $I_n+2nI_{n-1}=e\cdot 5^n-3^n$, pentru orice număr natural n, $n\geq 1$.

34. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

Sursă: 2019 · Model Oficial

2019_Matematica_M1_Mate-Info_Model_Oficial_Subiect.pdf

5p **b)** Determinați abscisele punctelor situate pe graficul funcției f în care tangenta la graficul funcției f este paralelă cu dreapta de ecuație $y=-\frac{1}{7}x+2$.

5p **c)** Demonstrați că pentru fiecare număr natural nenul n, ecuația $f(x)+n=0$ are soluție unică.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x}{e^x}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^2 e^x f(x)\,dx=2$.

5p **b)** Demonstrați că suprafața plană delimitată de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x=-1$ și $x=1$ are aria egală cu $2-\frac{2}{e}$.

5p **c)** Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră $I_n=\int_0^1 x^n f(x)\,dx$. Demonstrați că $\lim\limits_{n\to+\infty}(n+2)I_n=\frac{1}{e}$.

35. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

Sursă: 2019 · Simulare Nationala

2019_Matematica_M1_Mate-Info_Simulare_Nationala_Subiect.pdf

2. Se consideră funcţia $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\ln(x+1)$.

5p **a)** Calculaţi $\int_1^2 \frac{(3x-2)f(x)}{\ln(x+1)}dx$.

5p **b)** Arătaţi că $\int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{4}$.

5p **c)** Calculaţi $\lim\limits_{t\to 0}\frac{1}{t^3}\int_0^t f(x)dx$.

36. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

Sursă: 2019 · Speciala Subiect V08 · V08

2019_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Speciala_Subiect_V08.pdf

	1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x\left(x^2+4x+1\right)$.
5p	**a)** Arătaţi că $f'(x)=e^x(x+5)(x+1)$, $x\in\mathbb{R}$.
5p	**b)** Determinați abscisele punctelor situate pe graficul funcției f, în care tangenta la graficul funcţiei f este paralelă cu axa Ox.
5p	**c)** Determinați valorile reale ale lui a pentru care ecuația $f(x)=a$ are exact trei soluții reale.

37. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

Sursă: 2019 · Toamna August · V07

2019_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Toamna_August-Septembrie_Subiect_V07.pdf

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=1-\frac{2}{x+1}-\ln\frac{x}{x+1}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{x-1}{x(x+1)^2}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Se consideră funcțiile $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{x-1}{x+1}$ și $h:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $h(x)=\ln\frac{x}{x+1}$. Demonstrați că graficele funcțiilor g și h **nu** au niciun punct comun.

38. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

Sursă: 2019 · Vara Iunie · V06

2019_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Vara_Iunie-Iulie_Subiect_V06.pdf

---

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2e^{-x}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=x(2-x)e^{-x}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinaţi intervalele de monotonie a funcţiei f.

5p **c)** Demonstrați că, pentru orice $a\in\left(0,4e^{-2}\right)$, ecuația $f(x)=a$ are exact trei soluții reale.

39. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

Sursă: 2020 · Model Oficial

2020_Matematica_M1_Mate-Info_Model_Oficial_Subiect.pdf

5p **c)** Se consideră numerele reale a, b şi c astfel încât punctul $M(a,b)$ este situat pe graficul funcției $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=x^2-8\ln 2+8\ln x$ şi punctul $N(a,c)$ este situat pe graficul funcției $h:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $h(x)=8x-12$. Demonstraţi că $b\geq c$, pentru orice $a\in[2,+\infty)$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x^2+4}$.

5p **a)** Arătaţi că $\displaystyle\int_0^1\left(x^2+4\right)f(x)\,dx=-\frac{11}{3}$.

5p **b)** Demonstraţi că orice primitivă a funcției f este concavă pe $(-\infty,0]$.

5p **c)** Pentru fiecare număr natural n, se consideră $I_n=\displaystyle\int_1^2 x^n f(x)\,dx$. Demonstraţi că $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n=-\infty$.

40. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

Sursă: 2020 · Speciala Subiect V01 · V01

2020_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Speciala_Subiect_V01.pdf

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x}{x^2+2x+5}$.

5p **a)** Arătați că $\displaystyle\int_1^2 x\cdot\frac{1}{f(x)}dx=\frac{31}{3}$.

5p **b)** Arătați că $\displaystyle\int_0^1 g(x)dx=\frac{1}{2}\ln\frac{8}{5}$, unde $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)+\dfrac{1}{x^2+2x+5}$.

5p **c)** Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n=\displaystyle\int_{-1}^1 x^{2n-1}f(x)dx$. Demonstrați c $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n=0$.

41. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test01

2020_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test01.pdf

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x^2+1}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x}{f(x)}dx=1$.

5p **b)** Calculați $\int_0^1 f(x)dx$.

5p **c)** Arătați că există un unic număr real x pentru care $\int_0^x e^{f^2(t)}dt=x$.

42. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test02

2020_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test02.pdf

2. Se consideră funcţia $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{2x+1}{x+1}$.

5p **a)** Arătaţi că $\int_0^1 (x+1)f(x)\,dx=2$.

5p **b)** Arătaţi că $\int_0^1 f(x)\,dx=2-\ln 2$.

5p **c)** Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n=\int_0^1 e^x(x+1)^n\left(f(x)\right)^n dx$. Demonstraţi că $I_n+2nI_{n-1}=3^n e-1$, pentru orice număr natural n, $n\geq 2$.

43. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test03

2020_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test03.pdf

	1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=4x-\ln\left(x^2+1\right)$.
5p	**a)** Arătaţi că $f'(x)=\dfrac{2\left(2x^2-x+2\right)}{x^2+1}$, $x\in\mathbb{R}$.
5p	**b)** Calculaţi $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x+1)-f(x)\right)$.
5p	**c)** Demonstrați că funcția f este bijectivă.

44. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test04

2020_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test04.pdf

	1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}+\ln(x+1)-\ln x$.
5p	**a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{x-1}{x(x+1)^2}$, $x\in(0,+\infty)$.
5p	**b)** Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f.
5p	**c)** Demonstraţi că graficul funcției f **nu** intersectează axa Ox.

45. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test05

2020_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test05.pdf

2. Se consideră funcţia $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln x+\dfrac{1}{\ln x}$.

5p **a)** Arătați că orice primitivă a funcției f este strict crescătoare pe intervalul $(1,+\infty)$.

5p **b)** Calculați $\displaystyle\int_e^{e^2}\frac{1}{x}\big(f(x)-\ln x\big)dx$.

5p **c)** Determinați numărul real a, $a>e$, știind că $\displaystyle\int_e^a \ln x\,dx=2a$.

46. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test06

2020_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test06.pdf

2. Se consideră funcţia $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+\dfrac{2}{x+1}$.

5p **a)** Arătați că $\displaystyle\int_0^1\left(f(x)-x\right)dx=2\ln 2$.

5p **b)** Calculați $\displaystyle\int_1^e\left(f(x)-\frac{2}{x+1}\right)\ln x\,dx$.

5p **c)** Determinați $a\in(0,+\infty)$ pentru care $\displaystyle\int_0^1 2f(x)F(x)dx=\frac{1}{4}+\ln 4+\ln^2 a$, unde F este primitiva funcției f pentru care $F(0)=0$.

47. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test07

2020_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test07.pdf

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\cos x$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, f(x)\,dx=\frac{1}{2}$.

5p **b)** Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt$.

5p **c)** Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(f(x))^n\,dx$. Demonstrați că șirul $(I_n)_{n\geq 1}$ este convergent.

48. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test08

2020_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test08.pdf

	1. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^4-4\ln x$.
5p	**a)** Arătaţi că $f'(x)=\dfrac{4(x-1)(x+1)\left(x^2+1\right)}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.
5p	**b)** Determinați ecuația asimptotei verticale la graficul funcției f.
5p	**c)** Demonstrați că, pentru fiecare număr natural n, $n\geq 2$, ecuația $f(x)-n=0$ are două soluții reale distincte.

49. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test09

2020_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test09.pdf

	1. Se consideră funcția $f:(1,+\infty)\to(0,+\infty)$, $f(x)=\ln(x+1)-\ln(x-1)$.
5p	**a)** Arătați că $f'(x)=-\dfrac{2}{x^2-1}$, $x\in(1,+\infty)$.
5p	**b)** Demonstrați că funcția f este bijectivă.
5p	**c)** Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x f(x)\right)$.

50. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test10

2020_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test10.pdf

	1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x-5)(x-4)(x-3)(x-2)+1$.
5p	**a)** Arătați că $f'(5)=6$.
5p	**b)** Calculați $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{f(n+1)-1}{f(n)-1}\right)^n$.
5p	**c)** Demonstrați că ecuația $f'(x)=0$ are trei soluții reale.

51. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test11

2020_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test11.pdf

	1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-\ln\left(x^2+1\right)$.
5p	**a)** Arătaţi că $f'(x)=\dfrac{2x^3}{x^2+1}$, $x\in\mathbb{R}$.
5p	**b)** Demonstrați că axa Ox este tangentă graficului funcției f.
5p	**c)** Demonstrați că, pentru orice număr natural nenul n, ecuația $f(x)=n$ are două soluții reale distincte.

52. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test12

2020_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test12.pdf

	1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-6x^2+9x+5$.
5p	**a)** Arătaţi că $f'(x)=3(x-1)(x-3)$, $x\in\mathbb{R}$.
5p	**b)** Determinaţi intervalele de monotonie a funcției f.
5p	**c)** Demonstrați că funcția f este concavă pe $(-\infty,2]$.

53. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test13

2020_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test13.pdf

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-\ln\left(e^x+x-1\right)$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x)=\dfrac{x-2}{e^x+x-1}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Demonstrați că dreapta de ecuație $y=0$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Determinați imaginea funcției f.

54. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test14

2020_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test14.pdf

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln\dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{2(x-1)(x+1)}{\left(x^2+x+1\right)\left(x^2-x+1\right)}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $-\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Calculați $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(f(1)+f(2)+\ldots+f(n)+2\ln n\right)$.

55. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test15

2020_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test15.pdf

2. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+\ln x$.

5p **a)** Arătați că $\int_1^3\left(f(x)-\ln x\right)dx=\frac{26}{3}$.

5p **b)** Calculați $\int_1^2\left(f(x)-x^2\right)dx$.

5p **c)** Arătați că $\int_1^2\frac{1}{x}f\left(\frac{1}{x}\right)dx=\frac{3-4\ln^2 2}{8}$.

56. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test16

2020_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test16.pdf

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2}{x^4+1}$.

5p **a)** Arătați că $\displaystyle\int_0^1\left(x^4+1\right)f(x)dx=\frac{1}{3}$.

5p **b)** Demonstrați că $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx\le\frac{\pi}{8}$.

5p **c)** Se consideră primitiva F a lui f pentru care $F(1)=0$. Calculați $\displaystyle\int_0^1 F(x)dx$.

57. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test17

2020_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test17.pdf

5p	**b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f, în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcției f.
5p	**c)** Determinaţi punctul de extrem al funcției f.
	2. Se consideră funcţia $f:(-2,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{\ln(x+2)}{x^2+1}$.
5p	**a)** Arătați că $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(x)}{\ln(x+2)}dx=\frac{\pi}{4}$.
5p	**b)** Calculați $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$.
5p	**c)** Arătați că $\displaystyle\int_0^1\left(f(x)+\frac{\operatorname{arctg}x}{x+2}\right)dx=\frac{\pi}{4}\ln 3$.

58. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test18

2020_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test18.pdf

	1. Se consideră funcţia $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+2x-2\ln(x+1)$.
5p	**a)** Arătaţi că $f'(x)=\dfrac{2x(x+2)}{x+1}$, $x\in(-1,+\infty)$.
5p	**b)** Determinați numărul real $a\in(-1,+\infty)$, știind că tangenta la graficul funcției f în punctul $A(a,f(a))$ este paralelă cu dreapta de ecuație $y=3x+2020$.
5p	**c)** Demonstrați că $(x+1)^2\geq 2\ln(x+1)+1$, pentru orice $x\in(-1,+\infty)$.

59. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test19

2020_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test19.pdf

5p **b)** Calculați $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}$.

5p **c)** Arătați că, pentru orice $a\in(0,+\infty)$, ecuația $f(x)=a$ are soluție unică.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\left(x^2+2\right)e^{-x}$.

5p **a)** Arătați că $\int_1^4 e^x f(x)\,dx=27$.

5p **b)** Calculați $\int_1^e f(\ln x)\,dx$.

5p **c)** Arătați că $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt=2$.

60. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test20

2020_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test20.pdf

5p **b)** Calculați $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(-x)}{x}$.

5p **c)** Determinați imaginea funcției f.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{x^2+4}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^2 f(x)dx=\dfrac{\pi}{8}$.

5p **b)** Pentru fiecare număr natural n, considerăm numărul $I_n=\int_0^1 f^n(x)dx$. Arătați că $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n=0$.

5p **c)** Determinați numărul real a, $a>0$, pentru care $\int_0^a xf(x)dx=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{5}{4}$.

61. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

Sursă: 2020 · Toamna August · V03

2020_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Toamna_August-Septembrie_Subiect_V03.pdf

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=1-\dfrac{2x}{x^2+3}-\dfrac{2}{x^2+3}$.

5p **a)** Arătaţi că $\displaystyle\int_1^2\left(x^2+3\right)f(x)\,dx=\frac{1}{3}$.

5p **b)** Arătaţi că $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx=1-\ln\frac{4}{3}-\frac{\pi\sqrt{3}}{9}$.

5p **c)** Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n=\displaystyle\int_0^1 f^n(x)\,dx$. Arătați că $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n=0$.

62. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

Sursă: 2020 · Vara Iunie · V06

2020_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Vara_Iunie-Iulie_Subiect_V06.pdf

	1. Se consideră funcţia $f:(2,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{x-2}+\ln\dfrac{x-1}{x}$.
5p	**a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{-3x+4}{x(x-1)(x-2)^2}$, $x\in(2,+\infty)$.
5p	**b)** Determinaţi ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.
5p	**c)** Demonstrați că $\dfrac{1}{x-2}>\ln\dfrac{x}{x-1}$, pentru orice $x\in(2,+\infty)$.

63. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

Sursă: 2021 · Model Oficial

2021_Matematica_M1_Mate-Info_Model_Oficial_Subiect.pdf

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{2(x+3)}{\sqrt{x^2+4x+5}}$.

5p **a)** Arătaţi că $\displaystyle\int_0^1 f(x)\sqrt{x^2+4x+5}\,dx=7$.

5p **b)** Arătaţi că $\displaystyle\int_0^1\left(f^2(x)-4\right)dx=4\ln 2$.

5p **c)** Se consideră numerele reale a şi b, cu $0\le a<b$. Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n=\displaystyle\int_a^b f^n(x)\,dx$. Demonstraţi că $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n=+\infty$.

64. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

Sursă: 2021 · Simulare Nationala

2021_Matematica_M1_Mate-Info_Simulare_Nationala_Subiect.pdf

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{e^{2x}+x^4+2}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{e^{2x}+2x^3}{\sqrt{e^{2x}+x^4+2}}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Demonstrați că tangenta la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=0$, situat pe graficul funcției f, este paralelă cu dreapta de ecuație $x-\sqrt{3}y=0$.

5p **c)** Demonstrați că funcția f are un unic punct de extrem.

65. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

Sursă: 2021 · Speciala Subiect V07 · V07

2021_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Speciala_Subiect_V07.pdf

---

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\left(x^2-9\right)\left(x^2-4\right)+3$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=2x\left(2x^2-13\right)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Arătați că $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sin(x-3)}{f(x)-3}=\dfrac{1}{30}$.

5p **c)** Determinați valorile reale ale lui m pentru care ecuația $f(x)=m$ are exact patru soluții reale.

66. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

Sursă: 2021 · Teste Antrenament Oficiale · Test01

2021_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test01.pdf

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-\sqrt{x^2-4x+5}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-4x+5}-x+2}{\sqrt{x^2-4x+5}}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Demonstrați că funcția f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

5p **c)** Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f.

67. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

Sursă: 2021 · Teste Antrenament Oficiale · Test02

2021_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test02.pdf

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{2x-2}{x^2+4}$.

5p **a)** Arătați că $\displaystyle\int_0^2\left(x^2+4\right)f(x)\,dx=0$.

5p **b)** Calculați $\displaystyle\int_0^{2\sqrt{3}} f(x)\,dx$.

5p **c)** Demonstrați că $\displaystyle\int_1^x f(t)\,dt\geq 0$, pentru orice număr real x.

68. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

Sursă: 2021 · Teste Antrenament Oficiale · Test03

2021_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test03.pdf

	1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2-2x+1}{e^x}$.
5p	**a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{-(x-1)(x-3)}{e^x}$, $x\in\mathbb{R}$.
5p	**b)** Determinați intervalele de monotonie a funcției f.
5p	**c)** Demonstrați că $x-1\leq 2e^{\frac{x-3}{2}}$, pentru orice $x\in[1,+\infty)$.

69. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

Sursă: 2021 · Teste Antrenament Oficiale · Test04

2021_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test04.pdf

	1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+\ln\left(x^2+x+1\right)$.
5p	**a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{2x^2+4x+3}{x^2+x+1}$, $x\in\mathbb{R}$.
5p	**b)** Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x+1)-f(x)\right)$.
5p	**c)** Demonstrați că funcția f este bijectivă.

70. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

Sursă: 2021 · Teste Antrenament Oficiale · Test05

2021_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test05.pdf

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-\ln x$.

5p **a)** Arătați că $\int_1^{\sqrt{2}}\left(f(x)+\ln x\right)dx=\frac{3}{4}$.

5p **b)** Calculați $\int_1^{e}x\left(x^3-f(x)\right)dx$.

5p **c)** Arătați că $\int_1^{e^2}\frac{1}{x}f\left(\sqrt{x}\right)dx=\frac{2e^3-5}{3}$.

71. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

Sursă: 2021 · Teste Antrenament Oficiale · Test06

2021_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test06.pdf

---

1. Se consideră funcția $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln\dfrac{x+1}{x+3}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{2}{(x+1)(x+3)}$, $x\in(-1,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei verticale la graficul funcției f.

5p **c)** Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(xf(x)\right)$.

72. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

Sursă: 2021 · Teste Antrenament Oficiale · Test07

2021_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test07.pdf

---

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x\left(x^2-4x+5\right)$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=e^x(x-1)^2$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty} f(-x)$.

5p **c)** Demonstrați că graficul funcției f intersectează orice dreaptă paralelă cu axa Ox în cel mult un punct.

73. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

Sursă: 2021 · Teste Antrenament Oficiale · Test08

2021_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test08.pdf

2. Se consideră funcţia $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{3x}{\sqrt{x+1}}$.

5p **a)** Arătați că $\int_1^2 x\sqrt{x+1}f(x)\,dx=7$.

5p **b)** Calculați $\int_0^1 f^2(x)\,dx$.

5p **c)** Știind că $F:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=2(x+1)\sqrt{x+1}-6\sqrt{x+1}+4$ este o primitivă a funcţiei f, arătați că $\int_0^3 f(x)F(x)\,dx=32$.

74. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

Sursă: 2021 · Teste Antrenament Oficiale · Test09

2021_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test09.pdf

2. Se consideră funcţia $f:(-2,2)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+\dfrac{x^2}{x^2-4}$.

5p **a)** Arătați că $\displaystyle\int_1^{\frac{3}{2}}\left(f(x)-\frac{x^2}{x^2-4}\right)dx=\frac{5}{8}$.

5p **b)** Arătați că $\displaystyle\int_{-1}^{1}\big(f(x)+f(-x)\big)dx=4(1-\ln 3)$.

5p **c)** Determinați $a\in\left(0,\sqrt{3}\right)$, pentru care $\displaystyle\int_a^{\sqrt{3}}\sqrt{x-f(x)}dx=\sqrt{3}-1$.

75. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

Sursă: 2021 · Teste Antrenament Oficiale · Test10

2021_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test10.pdf

---

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\left(x^2-9\right)\left(x^2-4\right)+3$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=2x\left(2x^2-13\right)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Arătați că $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sin(x-3)}{f(x)-3}=\dfrac{1}{30}$.

5p **c)** Determinați valorile reale ale lui m pentru care ecuația $f(x)=m$ are exact patru soluții reale.

76. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

Sursă: 2021 · Teste Antrenament Oficiale · Test11

2021_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test11.pdf

5p **c)** Demonstrați că $2\ln x < x - \frac{1}{x}$, pentru orice $x \in (1, +\infty)$.

2. Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n = n\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\,dx$.

5p **a)** Arătați că $I_1 + \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx = 1$.

5p **b)** Arătați că $I_2 = 2 - \frac{\pi}{2}$.

5p **c)** Demonstrați că $I_n \leq \ln 2$, pentru orice număr natural nenul n.

77. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

Sursă: 2021 · Teste Antrenament Oficiale · Test12

2021_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test12.pdf

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2\operatorname{arctg} x$.

5p **a)** Arătați că $\int_1^3 \frac{x f(x)}{\operatorname{arctg} x}dx = 20$.

5p **b)** Arătați că $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{f(x)}{x}dx = \frac{5\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}-1}{2}$.

5p **c)** Demonstrați că $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1 f^n(x)dx = 0$.

78. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

Sursă: 2021 · Toamna August · V04

2021_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Toamna_August-Septembrie_Subiect_V04.pdf

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=1+\dfrac{2x}{x^4+1}$.

5p **a)** Arătați că $\displaystyle\int_0^1\left(x^4+1\right)f(x)\,dx=\frac{11}{5}$.

5p **b)** Se consideră $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o primitivă a funcției f. Știind că graficul funcției F are asimptotă oblică spre $+\infty$, determinați panta acestei asimptote.

5p **c)** Se consideră funcția $G:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, primitiva funcției f pentru care $G(0)=0$. Arătați că $\displaystyle\int_0^1 xG(x)\,dx=\frac{1}{3}+\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\ln 2$.

79. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

Sursă: 2021 · Vara Iunie · V02

2021_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Vara_Iunie-Iulie_Subiect_V02.pdf

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-\sqrt{x^2+3}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+3}-x}{\sqrt{x^2+3}}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați ecuaţia asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.

5p **c)** Determinați mulțimea valorilor reale ale lui a pentru care ecuația $f(x)=a$ are soluție.

80. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

Sursă: 2022 · Model Oficial

2022_Matematica_M1_Mate-Info_Model_Oficial_Subiect.pdf

2. Se consideră funcția $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\ln(x-1)$.

5p **a)** Arătați că $\int_4^6 \frac{f(x)}{\ln(x-1)}dx=10$.

5p **b)** Demonstrați că $F(\sqrt{7})<F(3)$, pentru orice primitivă F a funcției f.

5p **c)** Determinați numărul real m, știind că $\int_3^5 f(x)dx=m(4\ln 2-1)$.

81. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

Sursă: 2022 · Simulare Nationala

2022_Matematica_M1_Mate-Info_Simulare_Nationala_Subiect.pdf

5p **c)** Determinați valorile reale ale lui m pentru care ecuația $f(x)+f\left(\frac{4}{x}\right)=m$ are exact două soluții.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2+1}{e^x}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^3 e^x f(x)\,dx=12$.

5p **b)** Arătați că orice primitivă G a funcției $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{1}{f(x)}$ este convexă.

5p **c)** Determinați numărul real a pentru care $\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{e^x f(x)}}\,dx=\frac{a-\sqrt{2}}{3}$.

82. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

Sursă: 2022 · Speciala Subiect V03 · V03

2022_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Speciala_Subiect_V03.pdf

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+e^x+\dfrac{1}{e^x+1}$.

5p **a)** Arătați că $\displaystyle\int_0^2\left(f(x)-\frac{1}{e^x+1}\right)dx=e^2+1$.

5p **b)** Arătați că $\displaystyle\int_{-1}^1 e^x\left(f(x)-x-e^x\right)dx=1$.

5p **c)** Determinați numărul real m pentru care $\displaystyle\int_0^1 x\left(f(x)+f(-x)\right)dx=\frac{m}{2}-\frac{2}{e}$.

83. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

Sursă: 2022 · Toamna August · V07

2022_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Toamna_August-Septembrie_Subiect_V07.pdf

---

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2-3x+1}{e^x}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{(x-1)(4-x)}{e^x}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Arătați că axa Ox este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că ecuația $f(x)=n$ are soluție unică, pentru orice număr natural nenul n.

84. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

Sursă: 2022 · Vara Iunie · V01

2022_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Vara_Iunie-Iulie_Subiect_V01.pdf

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3-x+\sqrt{x^2+9}$.

5p **a)** Arătați că $\int_1^5\left(f(x)-\sqrt{x^2+9}\right)dx=0$.

5p **b)** Arătați că $\int_0^4\frac{x}{f(x)+x-3}dx=2$.

5p **c)** Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n=\int_0^1\frac{x^n}{f(x)}dx$. Demonstrați că $\lim\limits_{n\to+\infty}I_n=0$.

85. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

Sursă: 2023 · Model Oficial

2023_Matematica_M1_Mate-Info_Model_Oficial_Subiect.pdf

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2+e^x}{1+e^{-x}}$.

5p **a)** Arătați că $\displaystyle\int_0^3\left(1+e^{-x}\right)f(x)\,dx=8+e^3$.

5p **b)** Arătați că $\displaystyle\int_{-m}^{m}\frac{f(x)}{x^2+e^x}\,dx=m$, pentru orice $m\in(0,+\infty)$.

5p **c)** Determinați numărul real nenul a pentru care $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{e^{ax}-1}\int_0^x f(t)\,dt\right)=1$.

86. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

Sursă: 2023 · Simulare Nationala

2023_Matematica_M1_Mate-Info_Simulare_Nationala_Subiect.pdf

2. Se consideră funcția $f:(-3,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2+1}{\sqrt{x+3}}$.

5p **a)** Arătați că $\displaystyle\int_0^3 f(x)\sqrt{x+3}\,dx=12$.

5p **b)** Arătați că $\displaystyle\int_{-2}^{1}\frac{f(x)}{x^2+1}\,dx=2$.

5p **c)** Demonstrați că $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{f(x)}\,dx\le\frac{\pi}{2}$.

87. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

Sursă: 2023 · Speciala Subiect V06 · V06

2023_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Speciala_Subiect_V06.pdf

---

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x}{5}-\ln\left(x^2+x+5\right)$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{x^2-9x}{5\left(x^2+x+5\right)}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați abscisele punctelor situate pe graficul funcției f în care tangenta la graficul funcției f este paralelă cu axa Ox.

5p **c)** Demonstrați că ecuația $f(x)=0$ are soluție unică.

88. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

Sursă: 2023 · Toamna August · V07

2023_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Toamna_August-Septembrie_Subiect_V07.pdf

	1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{3e^x}{x^2+x+1}$.
5p	**a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{3e^x\left(x^2-x\right)}{\left(x^2+x+1\right)^2}$, $x\in\mathbb{R}$.
5p	**b)** Arătați că $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(2x)}{f(x)}=+\infty$.
5p	**c)** Demonstrați că ecuația $f(x)=m$ are exact trei soluții, pentru orice $m\in(e,3)$.

89. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

Sursă: 2023 · Vara Iunie · V01

2023_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Vara_Iunie-Iulie_Subiect_V01.pdf

	1. Se consideră funcția $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+3\ln\dfrac{x+3}{x-1}$.
5p	**a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{x^2+2x-15}{(x-1)(x+3)}$, $x\in(1,+\infty)$.
5p	**b)** Determinați ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției f.
5p	**c)** Arătați că $\ln\dfrac{x+3}{3(x-1)}\geq 1-\dfrac{x}{3}$, pentru orice $x\in(1,+\infty)$.

90. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

Sursă: 2024 · Model Oficial

2024_Matematica_M1_Mate-Info_Model_Oficial_Subiect.pdf

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x}{\left(x^2+1\right)^2}$.

5p **a)** Arătați că $\displaystyle\int_1^3 f(x)\left(x^2+1\right)^2\,dx=4$.

5p **b)** Arătați că $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx=\frac{1}{4}$.

5p **c)** Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n=\displaystyle\int_0^1 x^n\sqrt{xf(x)}\,dx$. Arătați că $I_n-I_{n+4}=\dfrac{2}{(n+2)(n+4)}$, pentru orice număr natural nenul n.

91. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

Sursă: 2024 · Simulare Nationala

2024_Matematica_M1_Mate-Info_Simulare_Nationala_Subiect.pdf

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x+1}{e^x}$.

5p **a)** Arătați că $\displaystyle\int_0^4 e^x f(x)\,dx=12$.

5p **b)** Arătați că $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx=\dfrac{2e-3}{e}$.

5p **c)** Pentru fiecare număr natural n, $n\geq 2$, se consideră numărul $I_n=\displaystyle\int_0^1 \dfrac{x^{n-1}}{f\left(x^n\right)}\,dx$. Demonstrați că $\dfrac{\ln 2}{n}\leq I_n\leq\dfrac{e-1}{n}$, pentru orice număr natural n, $n\geq 2$.

92. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

Sursă: 2024 · Speciala Subiect V09 · V09

2024_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Speciala_Subiect_V09.pdf

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+1+x\ln x$.

5p **a)** Arătați că $\int_1^3 \left(f(x)-x\ln x\right)dx=6$.

5p **b)** Arătați că $\int_1^e \left(f(x)-x-1\right)dx=\frac{e^2+1}{4}$.

5p **c)** Determinați numărul real nenul a pentru care volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g:[1,3]\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{1}{\left(f(x)-x\ln x\right)^2}$ este egal cu $\frac{7\pi}{24a}$.

93. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

Sursă: 2024 · Toamna August · V03

2024_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Toamna_August-Septembrie_Subiect_V03.pdf

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\left(x^2-2\right)e^{2x}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=2e^{2x}\left(x^2+x-2\right)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{f'(x)}$.

5p **c)** Determinați imaginea funcției f.

94. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

Sursă: 2024 · Vara Iunie · V10

2024_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Vara_Iunie-Iulie_Subiect_V10.pdf

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x(2x-4)+x^2-2x+4$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=2(x-1)\left(e^x+1\right)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Arătați că $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{1-e^x}=4$.

5p **c)** Arătați că ecuația $f(x)=0$ are exact două soluții.

95. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

Sursă: 2025 · Model Oficial

2025_Matematica_M1_Mate-Info_Model_Oficial_Subiect.pdf

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x+x^2-1$.

5p **a)** Arătați că $\int_1^4\left(f(x)-e^x\right)dx=18$.

5p **b)** Arătați că $\int_1^2\frac{e^x}{f(x)-x^2}dx=\ln(e+1)$.

5p **c)** Demonstrați că $\int_0^1\frac{x}{f(x)+1}dx\le 1-\frac{2}{e}$.

96. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

Sursă: 2025 · Speciala Subiect V03 · V03

2025_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Speciala_Subiect_V03.pdf

	1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{2x-2+\ln x}{x}$.
5p	**a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{3-\ln x}{x^2}$, $x\in(0,+\infty)$.
5p	**b)** Arătați că $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{\ln x}=3$.
5p	**c)** Determinați cel mai mare număr întreg m pentru care ecuația $f(x)=m$ are cel puțin o soluție.

97. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

Sursă: 2025 · Toamna August · V03

2025_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Toamna_August-Septembrie_Subiect_V03.pdf

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{2x-2+\ln x}{x}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{3-\ln x}{x^2}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Arătați că $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{\ln x}=3$.

5p **c)** Determinați cel mai mare număr întreg m pentru care ecuația $f(x)=m$ are cel puțin o soluție.

98. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

Sursă: 2026 · Model Oficial

2026_Matematica_M1_Mate-Info_Model_Oficial_Subiect.pdf

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-2+\sqrt{x^2+4}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^3\left(f(x)-\sqrt{x^2+4}\right)dx=3$.

5p **b)** Arătați că $\int_0^{\sqrt{5}}\frac{x}{f(x)-x^2+2}dx=1$.

5p **c)** Demonstrați că $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\int_0^x F(t)dt=0$, unde $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este primitiva funcției f pentru care $F(0)=0$.

99. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

Sursă: 2026 · Rezerva Vara Iunie · V07

2026_Matematica_M1_Mate-Info_Rezerva_Vara_Iunie-Iulie_Subiect_V07.pdf

2. Se consideră funcția $f:(-2,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=4x^3+\dfrac{1}{x+2}$.

5p **a)** Arătați că $\displaystyle\int_1^2\left(f(x)-\frac{1}{x+2}\right)dx=15$.

5p **b)** Arătați că $\displaystyle\int_1^e\frac{4\ln x}{f(x)-4x^3}dx=e^2+9$.

5p **c)** Arătați că aria suprafeței plane delimitate de graficul funcției $g:(-2,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=f\left(e^x\right)-4e^{3x}$, axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=1$ este egală cu $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{3e}{e+2}$.

100. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

Sursă: 2026 · Speciala Subiect V02 · V02

2026_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Speciala_Subiect_V02.pdf

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=6+\frac{1}{x}+\frac{\ln^2 x}{x}$.

5p **a)** Arătați că $\int_1^3\left(f(x)-\frac{\ln^2 x}{x}\right)dx=12+\ln 3$.

5p **b)** Arătați că $\int_1^e\left(f(x)-6-\frac{1}{x}\right)dx=\frac{1}{3}$.

5p **c)** Determinați numărul real m pentru care aria suprafeței plane delimitate de graficul funcției $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{f(x)-6}{x}$, axa Ox și dreptele de ecuații $x=1$ și $x=e$ este egală cu $m\left(1-\frac{2}{e}\right)$.

101. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

Sursă: 2026 · Toamna August · V04

2026_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Toamna_August-Septembrie_Subiect_V04.pdf

	1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x^2-4x-3-(2x-3)e^{2x}$.
5p	**a)** Arătați că $f'(x)=4(x-1)\left(1-e^{2x}\right)$, $x\in\mathbb{R}$.
5p	**b)** Arătați că $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=4$.
5p	**c)** Demonstrați că ecuația $f(x)+n=0$ are soluție unică, pentru orice număr natural nenul n.

102. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

Sursă: 2026 · Vara Iunie · V03

2026_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Vara_Iunie-Iulie_Subiect_V03.pdf

	1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^3-4x}{x^2+5}$.
5p	**a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{\left(x^2-1\right)\left(x^2+20\right)}{\left(x^2+5\right)^2}$, $x\in\mathbb{R}$.
5p	**b)** Arătați că dreapta de ecuație $y=x$ este asimptota oblică spre $+\infty$ la graficul funcției f.
5p	**c)** Determinați mulțimea numerelor reale m pentru care ecuația $f(x)=m$ are exact trei soluții.